Topologia
Lista 2

Zad 1. Udowodnić, że jeśli zbiór G jest otwarty, to dla każdego zbioru A zachodzi

$$G \cap \overline{A} \subset \overline{G \cap A}, \qquad \overline{G \cap \overline{A}} = \overline{G \cap A}.$$

Zad 2. Wyznaczyć brzeg oraz pochodną (zbiór punktów skupienia) wszystkich zbiorów z zadania 2 z listy 1 oraz zadania 1 z listy 0.

Zad 3. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną. n-tą pochodną $A^{(n)}$ zbioru A określami indukcyjnie wzorami

$$A^{(1)} = A^d, \qquad A^{(n)} = (A^{(n-1)})^d.$$

Udowodnić że dla dowolnych dwóch zbiorów A i B w przestrzeni topologicznej X spełnione są następujące relacje

a) $A \subset B \Rightarrow A^d \subset B^d$,

b) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$,

c) $(A \cap B)^d \subset A^d \cap B^d$,

d) $A^{(n+1)} \subset A^{(n)}$ (przy dodatkowym założeniu, że X jest T_1-przestrzenią).

Zad 4. Podać przykład podzbioru prostej euklidesowej $\mathbb{R}$ posiadającego n różnych pochodnych.

Zad 5. W dowolnej przestrzeni topologicznej X udowodnić wzory

$$A \cup \mathrm{Fr}(A) = \overline{A}, \qquad \mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A},$$

oraz równoważności

$$A \text{ jest zbiorem domkniętym} \Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) = A \cap \overline{X \setminus A},$$

$$A \text{ jest zbiorem otwartym} \Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus A.$$

Zad 6. Niech A będzie pozdbiorem przestrzeni topologicznej X. Wykazać, że

a) A jest gęsty wtedy i tylko wtedy gdy $X \setminus A$ jest brzegowy,

b) zbiór A jest jednocześnie gęsty i brzegowy $\Longleftrightarrow \mathrm{Fr}A = X$.

Zad 7. Sprawdzić, czy zbiór liczb parzystych w topologi z zadania 7 z listy 0 jest zbiorem brzegowym lub gęstym.